

ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ :

Η θεωρία αποφάσεων μελετά τα προβλήματα συμπερασματολογίας κατά τη διάρκεια των οποίων η λήψη αποφάσεων καθορίζεται με θεμελιωμένα κριτήρια

Υπενθυμίζουμε,

Έστω ένα πληθυσμό (δηλ. ένα σύνολο οντοτήτων του οποίου ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά γνωρίσματα τα οποία μελετούμε), υπάρχει κάποιο χαρακτηριστικό (πχ μέσο μηνιαίο κόστος, μέσος αριθμός πελατών σε μονάδα του χρόνου) με μοναδική άγνωστη τιμή. Έστω αυτή θ . Το θ , λέγεται άγνωστη παράμετρος και ανήκει σε ένα γνωστό σύνολο Θ το οποίο λέγεται παραμετρικός χώρος.

Ο παραμετρικός χώρος Θ , περιέχει όλες τις πιθανές τιμές της άγνωστης παραμέτρου θ .

π.χ.

$$X \sim B(n, p) \quad \text{τότε} \quad \Theta = p \in [0, 1], \quad \Theta = [0, 1]$$

$$X \sim \text{Exp}(\theta) \quad \text{τότε} \quad \Theta = (0, +\infty), \quad \Theta = (0, +\infty)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{τότε} \quad \Theta = \{(\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < +\infty, \sigma^2 > 0\} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$$

Στη Θεωρία Αποφάσεων, στη διάθεσή μας για την επίλυση και για τη λήψη γενικότερα των αποφάσεων, έχουμε τα δεδομένα $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ που είναι παρατηρούμενες τιμές των $Y_1, X_2, \dots, X_n$.

Ο αριθμός των δεδομένων n , λέγεται μέγεθος του δείγματος και όταν οι $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι ανεξάρτητες και ισοδύναμες (δ.η. έχουν την ίδια σ.π.η ή σ.π.ν.) τότε λέμε ότι έχουμε τυχαίο δείγμα (τ.δ). Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι αν $x_i \sim f(x_i/\theta)$ και ανεξάρτητες, $\forall i=1,2,\dots,n$ τότε η από κοινού κατανομή τους είναι η εξής:

$$f(\underline{x}/\theta) = f(x_1, \dots, x_n/\theta) \stackrel{\text{αυτ.}}{=} f(x_1/\theta) \dots f(x_n/\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta)$$

— περίθωφες κατανομές

Η εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου θ ή μιας συνάρτησης αυτής $g(\theta)$, βασίζεται σε συναρτήσεις των δεδομένων και γνωστών ποσοτήτων που δεν εξαρτώνται από την άγνωστη παράμετρο θ .

Μια στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου θ λέγεται επιτήκεις, ενώ η τιμή που προκύπτει όταν αντικατασταθούν τα $x_1, x_2, \dots, x_n$ από τις τιμές τους, λέγεται εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου θ .

ΟΡΙΣΜΟΣ (Χώρος αποφάσεων)

Χώρος αποφάσεων (D), είναι το σύνολο όλων των δυνατών ενεργειών / πράξεων (d) που μπορεί κάποιος να λάβει.

Παρατήρηση 1:

Στην επιτηκετική ο χώρος των αποφάσεων είναι ίδιος με τον παραμετρικό χώρο ($D = \Theta$)

Παρατήρηση 2:

Στον έλεγχο υποθέσεων ο χώρος των αποφάσεων είναι το σύνολο:

$$D = \{ \text{απορ. } H_0 \text{ ή δεν απορ. } H_0 \}$$

Ορισμός:

Η συνάρτηση απόφασης είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση η οποία ορίζεται $d: \mathbb{R}^n \rightarrow D$

Ορισμός:

Συνάρτηση ζημίας ή απώλειας είναι η συνάρτηση που ευφράζει των απώλειο-ζημιά που θα έχουμε, όταν παίρνουμε των απόφαση $d(x)$ τη στιγμή που η πραγματική τιμή που θέλουμε να ευθυμίσουμε είναι θ .

Loss function / Συνάρτηση Ζημίας:

$$L(\theta, d): \Theta \times D \rightarrow \mathbb{R}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΑΠΩΛΕΙΑΣ / ΖΗΜΙΑΣ:

- 1) $L(\theta, d(x)) \geq 0, \forall \theta$
- 2) $L(\theta, \theta) = 0$

Π.Χ

Απόλυτο σφάλμα: $L(\theta, d) = |d - \theta|$

Τετραγ. σφάλμα: $L(\theta, d) = (d - \theta)^2$

k-οστό σφάλμα: $L(\theta, d) = |d - \theta|^k$

LINEX

$$L(\theta, d) = e^{k(d-\theta)} - k(d-\theta) - 1$$

η οποία είναι συνάρτηση απώλειας

$$1) \quad \mathcal{L}(\theta, \theta) = e^{k(\theta-\theta)} - k(\theta-\theta) - 1 = 0$$

$$2) \quad \mathcal{L}(\theta, d) \geq 0 ;$$

$$e^{k(d-\theta)} - k(d-\theta) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \quad x = k(d-\theta)$$

και μέσω ανειραρκετικού λογισμού προκύπτει αλήθεια

Stein συνάρτηση :

$$\mathcal{L}(\theta, d) = \frac{d}{\theta} - 1 - \log \frac{d}{\theta}$$

Είναι μία συνάρτηση απώλειας, αφού πληροίται οι παραπάνω ιδιότητες.

Μία άλλη συνάρτηση απώλειας είναι:

$$\mathcal{L}(\theta, d) = \begin{cases} (d-\theta)^2, & d < \theta \quad (\text{υποεπιτήρηση}) \\ 10(d-\theta)^2, & d \geq \theta \quad (\text{υπερεπιτήρηση}) \end{cases}$$

→ "εγκωρύφει" πιο αυστηρά
η υπερεπιτήρηση.

ΜΕΙΩΝΕΥΤΗΜΑΤΑ :

1) Έχουμε θ άγνωστη παράμετρο

2) Έχουμε $d = d(x)$: τυχαίωση

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση κινδύνου ή διακυβδινεύσεως ορίζεται από το σχέση (Risk function)

$$R(\theta, d) = E(\mathcal{L}(\theta, d(x)))$$

Πως θα μπορούσαμε να αναπαραστήσουμε για την κατανομή μιας σ.σ. $T=T(\underline{x})$ για την ευτήκνηση της άγνωστης ποσότητας θ ; Το απώτερο σφάλμα $|T(\underline{x})-\theta|$ ή οποιαδήποτε άλλη παράσταση προκύπτει με την υιοθέτηση οποιασδήποτε άλλης Παρόμοιας ποσότητας-παράστασης-συνάρτησης απώτεια, θα οδηγούσε στην αναγνώριση του εξής Προβλήματος:

Οι παραπάνω παραστάσεις να έχουν άγνωστη και τυχαία τιμή, άγνωστη γιατί περιέχει την άγνωστη παράμετρο θ και τυχαία, επειδή είναι τυχαία μεταβλητή ως συνάρτηση των $X_1, X_2, \dots, X_n$. Επομένως, δεν εξυπηρετεί ως κριτήριο για να αξιολογησουμε τον ευτήκνηση $T(\underline{x})$. Για να καταλήγουμε σε ένα χρησιμο κριτήριο θα πρέπει να "διαχειριστούμε" την ευχέρεια του σφάλματος ευτήκνησης. Ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι να θεωρήσουμε την κατά μέσο όρο τιμή της παράστασης-συνάρτησης απώτεια ως προς την κατανομή του $\underline{x} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$